CHAPITRE 1 : Introduction

I) Motivations, exemples, éléments de classification :

Les équations aux dérivées partielles d'évolution modélisent l'évolution temporelle d'une quantité dans un milieu continu (en général, l'espace physique). La quantité considérée peut être une grandeur physique (température, densité de particules, vitesse d'un fluide...), biologique (concentration d'une espèce chimique dans le sang...), économique (prix d'une action ...)

Exemples :

* Équation de la chaleur : la température $T = T(t,x)$ d'un milieu homogène isotrope, sans source de chaleur interne, obéit à l'équation

$$\partial_t T - \Delta T = 0$$

* Équation de transport :

$$\partial_t u + b \cdot \nabla_x u = 0$$

<u>Problématique</u> : comme pour tous les problèmes d'équations aux dérivées partielles théoriques, l'enjeu est avant tout de montrer l'existence et/ou l'unicité d'une solution, en gardant à l'esprit qu'on ne dispose que rarement de formules explicites. Déterminer dans quel(s) espace(s) fonctionnel(s) on va chercher ces solutions est un point crucial ; d'ailleurs, les espaces fonctionnels dans lesquels on a existence et unicité peuvent être différents.

Dans le cas des EDP d'évolution, on s'intéressera plus spécifiquement au <u>problème de Cauchy</u> : étant donnée une condition initiale u_0 (ainsi que des conditions sur les bords du domaine, le cas échéant), peut-on résoudre le problème

$$\begin{cases} \partial_t u + A(u) = 0, & t > 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

où A est un opérateur différentiel éventuellement non linéaire, ne faisant intervenir que des dérivées en x ?

<u>Éléments de classification</u> :

Soit A, B, C, D, E, F des réels. On considère l'EDP à coefficients constants

$$A\partial_t^2 u + B\partial_t\partial_x u + C\partial_x^2 u + D\partial_t u + E\partial_x u + F u = 0. \quad (*)$$

Il est naturel de chercher des solutions sous la forme

$$u(t,x) = U \exp(\lambda t + kx)$$

(λ, k) est alors solution du polynôme

$$A\lambda^2 + B\lambda k + Ck^2 + D\lambda + Ek + F = 0. \quad (**)$$

On distingue plusieurs cas:

- Si $B^2 - 4AC < 0$, l'ensemble des points $(\lambda, k) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(**)$ est une ellipse. On dit alors que l'équation $(*)$ est une équation <u>elliptique</u>.

  Exemple: équation de Laplace:

$$\partial_t^2 u + \partial_x^2 u = 0$$

- Si $B^2 - 4AC > 0$, l'ensemble des points $(\lambda, k) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(**)$ est une hyperbole. On dit alors que l'équation $(*)$ est une équation <u>hyperbolique</u>.

  Exemple: équation des ondes:

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$$

- Si $B^2 - 4AC = 0$ et si $A \neq 0, E \neq 0$ ou $C \neq 0, D \neq 0$, l'ensemble des points (λ, k) vérifiant $(**)$ est une parabole. On dit alors que l'équation $(*)$ est une équation <u>parabolique</u>.

Exemple : équation de la chaleur :

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0.$$

Cette terminologie est étendue aux équations à coefficients variables possédant les mêmes propriétés. Plus précisément : on suppose maintenant que dans (*), les coefficients A, B, C, D, E, F dépendent de t et de x (disons continûment pour simplifier). Alors si

$$\forall (t,x) \quad B(t,x)^2 - 4A(t,x)C(t,x) \begin{matrix} < \\ > \\ = \end{matrix} 0,$$ on dit que l'équation

est $\begin{matrix} \text{elliptique} \\ \text{hyperbolique} \\ \text{parabolique} \end{matrix}$.

Attention ! Une équation peut changer de type !

Exemple :
$$\partial_t^2 u + x \partial_x^2 u = 0 \quad , t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

<u>Remarque</u> : On vérifie aisément que si $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est solution du système

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = 0$$

Alors u et v sont solutions de l'équation des ondes. Par extension, on dira également que les équations de la forme

$$\partial_t u + b(t,x) \cdot \nabla_x u + c(t,x) u = 0$$

sont des équations hyperboliques.

Propriétés: les équations d'un même type partagent les mêmes propriétés qualitatives, ce qui justifie cette terminologie. On se concentre ici sur les équations paraboliques et hyperboliques. En effet, les équations elliptiques appartiennent plutôt aux problèmes stationnaires.

On verra en particulier les propriétés suivantes :

- Les équations paraboliques ont un effet régularisant, tandis que les équations hyperboliques propagent les singularités.
- La vitesse de l'information est infinie dans le cas parabolique, et finie dans le cas hyperbolique.

II) Notion d'estimation a priori :

La notion d'estimation a priori est primordiale en théorie des EDP. Bien souvent, on fait le type de raisonnement suivant :

1) On suppose qu'une solution du problème existe ;
2) On cherche un majorant d'une norme

ad hoc de cette solution :

$$\|u\| \leq C.$$

(Évidemment, la norme $\| \ \|$, la constante C et la façon de montrer cette inégalité dépendent du problème considéré ...)

3) On approche le problème dont on cherche une solution par un autre problème, pour lequel on sait que des solutions existent. Le point crucial est que lors de cette étape d'approximation - mettons par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de solutions des problèmes approchées - la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'estimation trouvée au 2) :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \|u_n\| \leq C.$$

4) On utilise des propriétés de compacité (éventuellement faible) de l'espace fonctionnel considéré pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (à une sous-suite près). On note u la limite (éventuellement faible) de la sous-suite. Alors par passage à la limite dans l'équation vérifiée par les u_n, la fonction u est solution de l'EDP recherchée, et vérifie également l'estimation d'énergie $\|u\| \leq C$. (Attention : cette étape est loin d'être automatique dans les cas non linéaires).

__Illustration__ : Méthode de Galerkin

On considère l'équation de réaction-diffusion

$$(RD) \begin{cases} \partial_t u + c(t,x)\, u - \Delta u = 0 & t>0, x \in \Omega \\ u_{|t=0} = u_0 \in L^2(\Omega) & \\ u_{|\partial\Omega} = 0 & \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné régulier,

$c \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$, $c(t,x) \geq 0$ pp.

En multipliant formellement l'équation par u, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega c(t,x)|u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 = 0$$

Donc $\quad \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_0^t \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$

(Estimation a priori).

On cherche à présent à justifier l'existence de solutions de (RD) en s'appuyant sur cette estimation a priori. Pour cela, on écrit la formulation variationnelle de l'équation (RD) : pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$, pour presque tout $t>0$,

$$\langle \partial_t u, v\rangle_{H^{-1},H^1_0} + \int_\Omega c(t,x)\, u(t,x)\, v(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(t,x)\cdot\nabla v(x) = 0$$

On va projeter cette équation sur un sous-espace de dimension finie de $H^1_0(\Omega)$: soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $H^1_0(\Omega)$ pour le produit scalaire L^2, et soit $E_n = \text{Vect}(v_0, \dots, v_n)$, $\mathbb{P}_n$ = proj. orthogonale sur E_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on cherche $u_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, E_n)$ telle que

$$(G)\begin{cases} \langle \partial_t u_n, v_k \rangle + \int_\Omega c(t,x)\, u_n v_k + \int_\Omega \nabla u_n(t,x) \cdot \nabla v_k = 0 \\ \forall t \geq 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad u_n|_{t=0} = P_n u_0 . \end{cases}$$

En écrivant $u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} d_k^n(t)\, v_k$, on voit aisément que la formulation variationnelle dans E_n s'écrit comme une EDO linéaire sur

$$U_n(t) = \begin{pmatrix} d_0^n(t) \\ \vdots \\ d_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Il existe donc une unique solution de (G) dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, E_n)$ pour tout n. De plus, cette solution vérifie l'estimation a priori.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u_n(t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))} + 2\int_0^\infty \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Donc il existe $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}_+, H^1_0(\Omega))$ tel que à une sous-suite près,

En exercice

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } w-L^2(\mathbb{R}_+, H^1_0(\Omega)) \text{ et dans } w^*-L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$$

$$\text{et } \partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u \text{ dans } w-L^2(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\Omega))$$

Comme la convergence faible L^2 n'implique pas la convergence presque partout, on ne peut pas passer immédiatement à la limite dans (G). En revanche, on montre facilement que pour toute fonction $\theta \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}_+)$ et pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$, on a

$$-\int_0^\infty \int_\Omega u(t,x)v(x)\partial_t\theta - \int_\Omega u_0(x)v(x)\theta(0)\,dx$$
$$+\int_0^\infty \int_\Omega c(t,x)\,u(t,x)\,v(x)\theta(t)\,dx\,dt$$
$$+\int_0^\infty \int_\Omega \nabla u(t,x).\nabla v(x)\ \theta(t)\,dx\,dt = 0.$$

Or $-\int_0^\infty \int_\Omega u(t,x)v(x)\partial_t\theta - \int_\Omega u_0(x)v(x)\theta(0)\,dx$

$$= \int_0^\infty \langle \partial_t u(t), v\rangle_{H^{-1},H^1_0}\ \theta(t)\,dt$$

On en déduit que $\forall \theta \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}_+)$,

$$\int_0^\infty \theta(t)\left\{\langle \partial_t u(t), v\rangle_{H^{-1},H^1_0} + \int_\Omega c(t,x)u(t,x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(t,x).\nabla v(x)dx\right\}dt$$
$$= 0$$

et la quantité entre accolades est dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. Elle est donc nulle presque partout. Donc u est solution de la formulation variationnelle de (RD).

III) Comment construire des solutions ?

1) Cas linéaire

Si l'équation est linéaire, il y a principalement deux méthodes pour résoudre l'équation :

⊛ Tout d'abord, dans les cas les plus favorables, on peut chercher une formule de représentation pour les solutions. Cette méthode est particulièrement appliquée dans le cas des équations linéaires à coefficients constants, car dans ce cas on pourra utiliser (au moins dans l'espace entier) la transformée de Fourier.

<u>Exemple</u> : équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$:

$$(H)\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

On cherche des solutions de (H) en passant en Fourier en x : on a

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u} + |\xi|^2 \widehat{u} = 0 \\ \widehat{u}_{|t=0} = \widehat{u_0} \end{cases}$$

Donc $\quad \widehat{u}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)\exp(-t|\xi|^2)$

En repassant dans l'espace physique on en déduit

$$u(t) = u_0 *_x K_t$$

où
$$K_t(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t|\xi|^2}\right) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t|\xi|^2} e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi t)^{N/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

<u>Autres exemples dans la suite du cours</u> :

* Équations de transport (méthode des caractéristiques)
* Équation de Schrödinger linéaire.

(*) Une autre méthode consiste à chercher une <u>formulation variationnelle</u> de l'équation, combinée à des estimations a priori ou à des variantes "évolutives" du Lemme de Lax-Milgram. (cf. méthode de Galerkin ci-dessus).

2) Cas non linéaire :

⊛ Application d'un théorème de point fixe :

Le théorème le plus connu est le théorème du point fixe de Picard :

Théorème : Soit E un espace de Banach
ϕ une application contractante
(i.e. r-Lipschitzienne avec $r \in [0,1[$)
Alors il existe un unique $x \in E$ tel que
$\phi(x) = x$.

On en déduit en particulier le théorème de Cauchy-Lipschitz (dans un Banach quelconque) :

Théorème (Cauchy-Lipschitz) :
Soit E un espace de Banach
$F : E \to E$ une application localement Lipschitzienne
$u_0 \in E$ quelconque.
Alors il existe $\tau > 0$ tel qu'il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0,\tau], E)$ de l'équation.

$$(2) \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = F(u) \\ u(t=0) = u_0 \end{cases}$$

Preuve : Comme sur $\mathbb{R}^n$: une fonction $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty), E)$ est solution de (2) si et seulement si

$$\begin{cases} u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\, ds. \\ \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Chercher une solution de (2) revient donc à chercher un point fixe de l'application

$$\phi : u \in \mathcal{C}([0,\infty[, E) \longmapsto v \in \mathcal{C}([0,+\infty[, E)$$

où $v(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\, ds$.

On montre alors que pour $\tau > 0$ suffisamment petit (dépendant de u_0), ϕ est une contraction sur $B_\tau(u_0, 1) = \{u \in \mathcal{C}([0,\tau], E),\ \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t) - u_0\|_E \leq 1\}$

$\blacksquare$

<u>Remarque</u> : En pratique, dans le cas des équations aux dérivées partielles, ce théorème donnera rarement l'existence d'une solution du problème recherché, car dans des EDP du type

$$\partial_t u = F(u),$$

en général $F(u)$ vit dans un espace avec moins de régularité que u... Mais néanmoins on pourra utiliser ce théorème pour montrer l'existence d'une solution approchée (cf ci-dessous).

<u>Remarque</u> : dans la pratique, on se ramènera souvent (après avoir trouvé des estimations a priori, par exemple) à l'application du théorème du point fixe de Picard, dans un espace bien choisi, en s'inspirant de la preuve du théorème de Cauchy - Lipschitz.

⊛ Approximation et compacité :

Étape 1 : On cherche des estimations a priori sur les solutions ;

Étape 2 : On trouve une suite de problèmes approchés, dont on sait qu'il existe une solution, et celle-ci vérifie l'estimation a priori.

Étape 3 : On passe à la limite.

<u>Exemple</u> : Équation de Burgers visqueuse :

(BV) $\partial_t u + u\partial_x u - \partial_x^2 u = 0 \quad t>0, x \in \mathbb{R}$.

estimation a priori :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} |u|^2 + \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u|^2 \leq 0$$

On cherche à appliquer la méthode de Galerkin vue plus haut à (BV) :

On considère l'équation

(3) $\partial_t u_n + \mathbb{P}_n \left(u_n \partial_x u_n - \partial_x^2 u_n\right) = 0 \quad , t>0, x\in\mathbb{R}$

où $\mathbb{P}_n$ est la projection orthogonale dans $L^2(\mathbb{R})$ sur $E_n = \{u \in L^2(\mathbb{R}), \hat{u}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq n\}$.

On pose $F(u) = -\mathbb{P}_n (u\partial_x u - \partial_x^4 u)$.
Alors F est localement Lipschitzienne sur E_n. En effet, on observe que si $u \in E_n$,

$$\|u\|_{L^\infty} \leqslant \|u\|_{L^2} \sqrt{n}$$

$$\|\partial_x u\|_{L^2} \leqslant \|u\|_{L^2}\, n$$

Par conséquent, pour tout $u, v \in E_n$,

$$\begin{aligned}
\|F(u)-F(v)\| &\leqslant \|u\partial_x u - v\,\partial_x v\|_{L^2} \\
&\quad + \|\partial_x^4 u - \partial_x^4 v\|_{L^2} \\
&\leqslant \|u(\partial_x u - \partial_x v)\|_{L^2} + \|(u-v)\,\partial_x v\|_{L^2} \\
&\quad + \|\partial_x^4 u - \partial_x^4 v\|_{L^2} \\
&\leqslant \sqrt{n}\|u\|_{L^2}\, n\|u-v\|_{L^2} + \sqrt{n}\|u-v\|_{L^2}\, n\|v\|_{L^2} \\
&\quad + n^4 \|u-v\|_{L^2} \\
&\leqslant \left(n^{3/2}(\|u\|+\|v\|) + n^4\right)\|u-v\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Donc F est localement Lipschitzienne sur E_n.
On en déduit qu'il existe $T_n > 0$ tel que (3) admette une unique solution $u_n \in \mathcal{C}([0,T_n], E_n)$.
De plus, u_n vérifie l'estimation a priori.
Ensuite, il faut passer à la limite quand $n \to +\infty$.
C'est plus compliqué que dans le cas linéaire (RD) car on ne peut pas passer simplement à la limite faible dans la non linéarité $u_n \partial_x u_n$.

On renvoie au Chapitre 3 pour un traitement de cette difficulté dans le cas des équations de Navier-Stokes.

3) Notions de solutions fortes, solutions faibles:

Les solutions aux dérivées partielles n'ont pas toujours la régularité suffisante pour que les dérivées intervenant dans l'équation soient définies dans un sens classique. Autrement dit, une EDP d'ordre k n'a pas forcément de solution dans $\mathcal{C}^k$ (ou même dans $W^{k,p}$ ...)

Dès lors, la question de l'espace fonctionnel dans lequel on cherche les solutions est cruciale.

Deux approches sont possibles:

- Si on cherche des solutions dans des espaces à forte régularité :

on va chercher des estimations de régularité locales et appliquer un théorème de point fixe

$\rightsquigarrow$ Existence et unicité locales d'une solution régulière.

Mais pas d'existence globale en général ...

Des solutions obtenues par ce procédé sont dites "<u>solutions fortes</u>".

- Dans des espaces à faible régularité, on va chercher des solutions comme limites d'une suite de solutions approchées, en utilisant des résultats de compacité et les estimations a priori.

Mais attention : en général, ces solutions ne sont pas uniques.

Des solutions obtenues par un tel procédé sont appelées "<u>solutions faibles</u>".